

Optimisation de trajectoire pour le procédé de fabrication additive Laser Powder Bed Fusion (LPBF)

Thèse financée par le projet SOFIA

Mathilde Boissier^{1,2}, Grégoire Allaire¹, Christophe Tournier²

¹CMAP, Ecole Polytechnique, France

²LURPA, ENS Paris Saclay, France

14 Mai 2019



Introduction

Le procédé LPBF

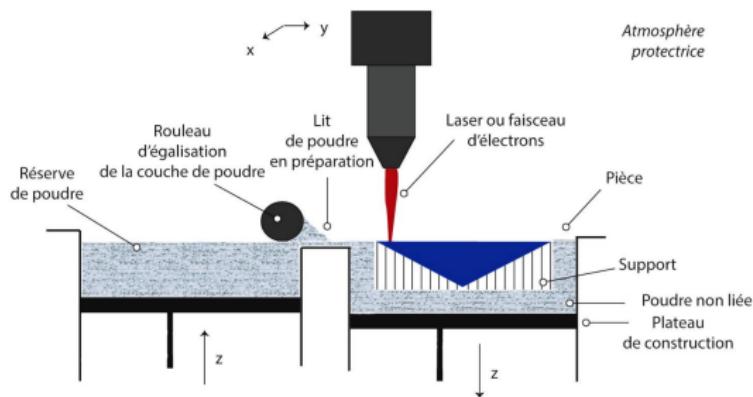


Schéma du processus
(<http://ceal-aluquebec.com/fabrication-additive>)

■ **Avantages :**
liberté dans le design, unicité de la pièce.

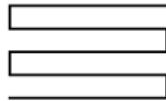
■ **Défauts :**
défauts liés à la fabrication (poudre, thermique, mécanique).

■ **Enjeux :**
amélioration de la qualité de la pièce finale, accélération du processus.

Trajectoires de lasage

État de l'art :

parallèle



contour



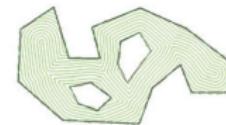
spirale



continue



Medial Axis Transformation



- Algorithmes évolutionnaires, génétiques.
- Modification de l'équation donnant la distance signée pour le contour.

Objectif : optimisation de la trajectoire sans considérer un motif de base

Plan

1 Introduction

2 Modèle physique

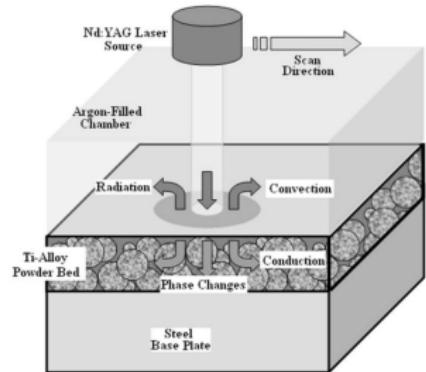
3 Trajectoire stationnaire

4 Trajectoire instationnaire

5 Conclusion et perspectives

Modèle physique

Modélisation du procédé LPBF



Procédé LPBF
(Roberts et al. [7])

Echelle microscopique

(Megahed et al. [6] and DebRoy et al. [3])

- modélisation précise du changement de phase, bain de fusion,
- 4 "états" en présence : poudre, solide, liquide, gazeux.

Échelle macroscopique

(Allaire and Jakabčin [1], Van Belle [9], and Megahed et al. [6])

- conduction, convection et rayonnement
- deux états en présence : poudre et solide (absence du bain de fusion)

Enjeux à l'échelle macroscopique :

- **thermomécaniques** : dilatation thermique, contraintes résiduelles, fusion de la pièce,
- **cinétiques** : temps d'exécution minimal, trajectoire facile à générer.

Modèle physique 3D

Grandeur physique : $A(t, x) = A_{sol.} \mathbb{1}_{sol.}(t, x) + A_{pou.} (1 - \mathbb{1}_{sol.}(t, x))$.

Contraintes à respecter :

- le changement de phase : $\forall x \in D, \exists t$ tel que $T(t, x) > T_\Phi$,
- la dilatation thermique : $\forall x \in D, \forall t, \quad T(t, x) < T_M$,
- les contraintes résiduelles.

Source simplifiée: $q(t, x) = P \exp(-\delta|x - u(t)|^2)$, où $u(t)$ représente la trajectoire du laser.

Hypothèses :

- pas de source volumique de chaleur, convection et rayonnement négligés.

Éq. de la chaleur:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho c_p \partial_t T - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = 0, & (t, x) \in (0, t_F) \times D, \\ \lambda \nabla T \cdot n = q, & (t, x) \in (0, t_F) \times \partial D_{top}, \\ \lambda \nabla T \cdot n = 0, & (t, x) \in (0, t_F) \times \partial D_{side}, \\ T = T_{init}, & (t, x) \in (0, t_F) \times \partial D_{bot}, \\ T(0, x) = T_{init}(x) & x \in D. \end{array} \right.$$

Modèle physique 2D : moyenne dans la direction de fabrication, perpendiculaire à la couche

Hypothèses :

- ajout d'un terme de diffusion, caractérisé par $\frac{\lambda_{sol}}{\Delta Z}$ avec ΔZ longueur caractéristique, afin de modéliser la conduction sur l'axe vertical.

Eq. de la chaleur:

$$\begin{cases} \rho c_p \partial_t T - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \frac{\lambda_{sol}}{\Delta Z} T = \frac{q}{L}, & (t, x) \in (0, t_F) \times \Sigma, \\ \lambda \nabla T \cdot n = 0, & (t, x) \in (0, t_F) \times \partial \Sigma, \\ T(0, x) = T_{init}(x) & x \in \Sigma. \end{cases}$$

Trajectoire stationnaire

Problème d'optimisation considéré

Modélisation stationnaire : la source est appliquée d'un coup sur la totalité de la trajectoire (fil chauffant).

Objectif : faire varier la trajectoire Γ afin de minimiser sa longueur ($J(\Gamma)$) tout en satisfaisant les contraintes de changement de phase (C_Φ) et de température maximale (C_M).

$$\min_{\Gamma} J(\Gamma) = \int_{\Gamma} ds$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} C_\Phi = \int_{\Sigma} [(T_\Phi - T)^+]^2 dx = 0 & (T > T_\Phi), \\ C_M = \int_{\Sigma} [(T - T_M)^+]^2 dx = 0 & (T < T_M). \end{cases}$$

et T solution de :

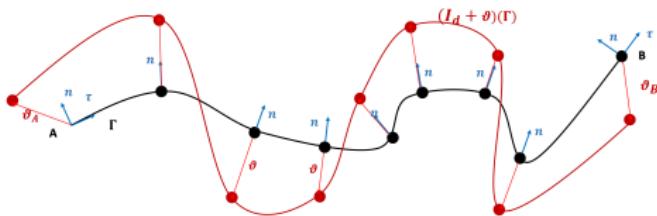
$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda_{pou.} \nabla T) + \frac{\lambda_{sol.}}{L \Delta Z} T = \frac{P}{L} \chi_{\Gamma}, & (t, x) \in (0, t_F) \times \Sigma \\ \nabla T \cdot n = 0 & (t, x) \in (0, t_F) \times \partial \Sigma \end{cases}$$



Calcul d'une vitesse de variation : optimisation de forme (Allaire, Jouve, and Toader [2] and Henrot and Pierre [4])

Optimisation de forme : variation par rapport à un champ de vecteur ϑ ,

Γ courbe orientée régulière de tangente τ , de normale n et de courbure κ avec A et B ses extrémités.



- Dérivée de forme de $J(\Gamma) = \int_{\Gamma} f(s)ds$:

$$J'(\Gamma)(\vartheta) = \int_{\Gamma} [\partial_n f + \kappa f] \vartheta \cdot n ds + f(B)\vartheta(B) \cdot \tau(B) - f(A)\vartheta(A) \cdot \tau(A)$$

- On a alors :

$$J(\Gamma^{n+1}) = J(\Gamma^n) + J'(\Gamma^n)(\vartheta) + o(\vartheta)$$

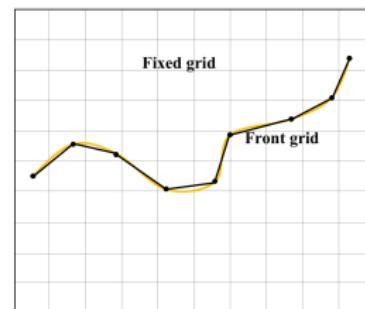
et on choisit ϑ tel que $J(\Gamma^{n+1}) \leq J(\Gamma^n)$.

Adaptation numérique

Modélisation de la ligne : méthodes de front tracking (Tryggvason et al. [8])

Discrétisation de la courbe sans adaptation du maillage physique.

- contrôle de la discrétisation de la courbe et calcul des grandeurs qui lui sont intrinsèques (normale, courbure, ...),
- transmission des informations entre le maillage physique et la discrétisation de la courbe.



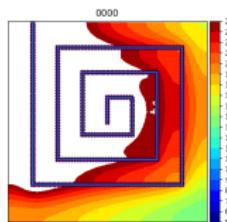
Algorithme de résolution

1. initialisation de la courbe discrétisée,
2. calcul des fonctions objectifs et contraintes (résolution de l'équation de la chaleur),
3. calcul de la dérivée de forme du problème et discrétisation,
4. modification de la courbe(dérivée de forme) et re-discrétisation,
5. calcul des fonctions objectifs et contraintes (résolution de l'équation de la chaleur),
- 6. s'il y a une amélioration : itération acceptée** retour à 3.
- 7. sinon : itération refusée** le pas est diminué et retour à 4.

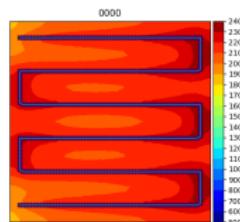
Résultats : fusion d'un carré de 10cm de côté

Valeurs : (Allaire and Jakabčin [1] and Van Belle [9])

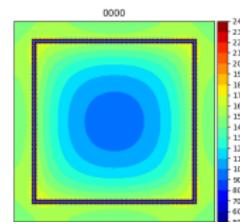
$$\lambda_{sol.} = 15 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad \lambda_{sol.} = 0.25 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad L = 10\text{cm}, \quad \Delta Z = 1\text{m}, \quad P = 800 \text{ W.m}^{-2}, \\ T_\Phi = 1700\text{K}, \quad T_M = 2000\text{K}, \quad T_{init} = 500\text{K}.$$



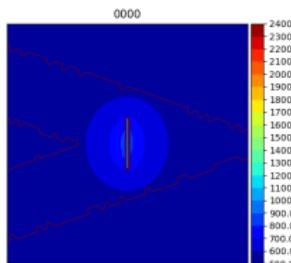
$$\alpha_{reg} = 10$$



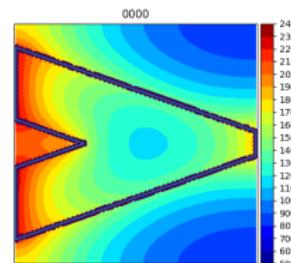
$$\alpha_{reg} = 30$$



$$\alpha_{reg} = 10$$



$$\alpha_{reg} = 10$$

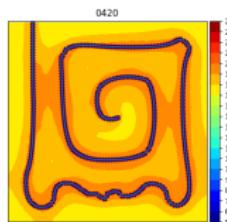


$$\alpha_{reg} = 20$$

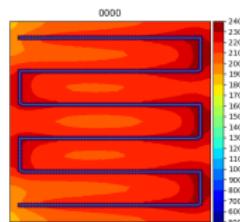
Résultats : fusion d'un carré de 10cm de côté

Valeurs : (Allaire and Jakabčin [1] and Van Belle [9])

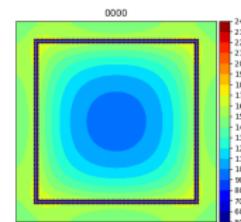
$$\lambda_{sol.} = 15 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad \lambda_{sol.} = 0.25 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad L = 10\text{cm}, \quad \Delta Z = 1\text{m}, \quad P = 800 \text{ W.m}^{-2}, \\ T_\Phi = 1700\text{K}, \quad T_M = 2000\text{K}, \quad T_{init} = 500\text{K}.$$



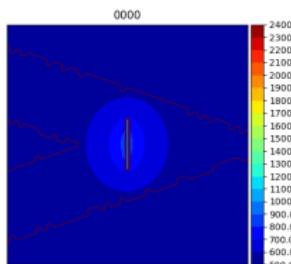
$$\alpha_{reg} = 10$$



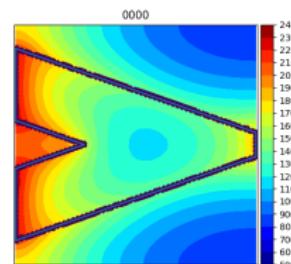
$$\alpha_{reg} = 30$$



$$\alpha_{reg} = 10$$



$$\alpha_{reg} = 10$$



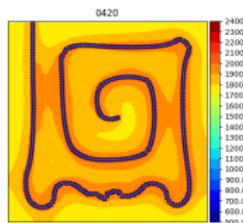
$$\alpha_{reg} = 20$$



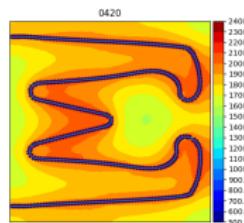
Résultats : fusion d'un carré de 10cm de côté

Valeurs : (Allaire and Jakabčin [1] and Van Belle [9])

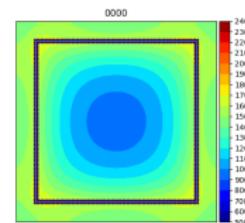
$$\lambda_{sol.} = 15 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad \lambda_{sol.} = 0.25 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad L = 10\text{cm}, \quad \Delta Z = 1\text{m}, \quad P = 800 \text{ W.m}^{-2}, \\ T_\Phi = 1700\text{K}, \quad T_M = 2000\text{K}, \quad T_{init} = 500\text{K}.$$



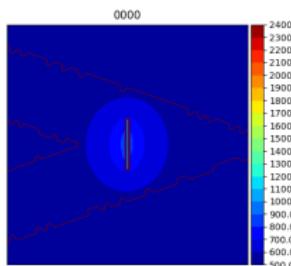
$$\alpha_{reg} = 10$$



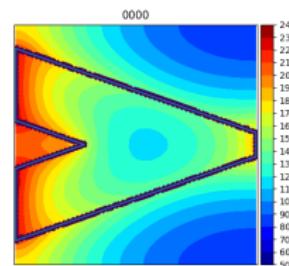
$$\alpha_{reg} = 30$$



$$\alpha_{reg} = 10$$



$$\alpha_{reg} = 10$$



$$\alpha_{reg} = 20$$

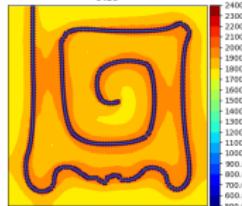


Résultats : fusion d'un carré de 10cm de côté

Valeurs : (Allaire and Jakabčin [1] and Van Belle [9])

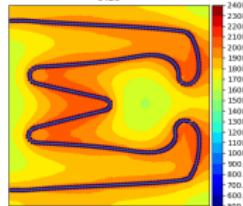
$$\lambda_{sol.} = 15 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad \lambda_{sol.} = 0.25 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad L = 10\text{cm}, \quad \Delta Z = 1\text{m}, \quad P = 800 \text{ W.m}^{-2}, \\ T_\Phi = 1700\text{K}, \quad T_M = 2000\text{K}, \quad T_{init} = 500\text{K}.$$

0420



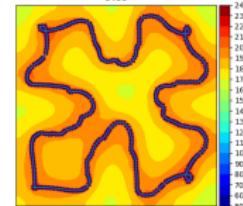
$\alpha_{reg} = 10$

0420



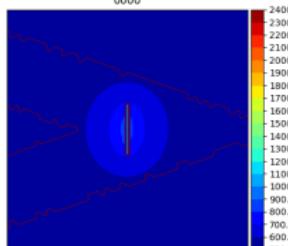
$\alpha_{reg} = 30$

0460



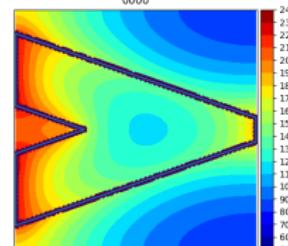
$\alpha_{reg} = 10$

0000



$\alpha_{reg} = 10$

0000



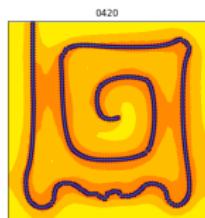
$\alpha_{reg} = 20$



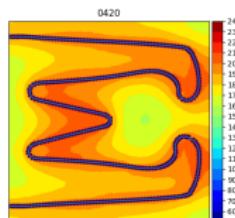
Résultats : fusion d'un carré de 10cm de côté

Valeurs : (Allaire and Jakabčin [1] and Van Belle [9])

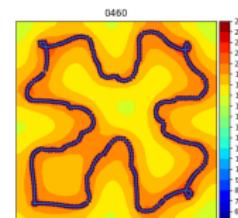
$$\lambda_{sol.} = 15 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad \lambda_{sol.} = 0.25 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad L = 10\text{cm}, \quad \Delta Z = 1\text{m}, \quad P = 800 \text{ W.m}^{-2}, \\ T_\Phi = 1700\text{K}, \quad T_M = 2000\text{K}, \quad T_{init} = 500\text{K}.$$



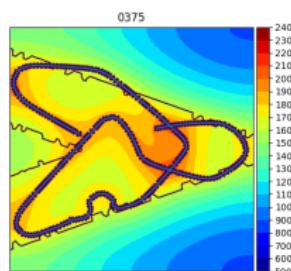
$$\alpha_{reg} = 10$$



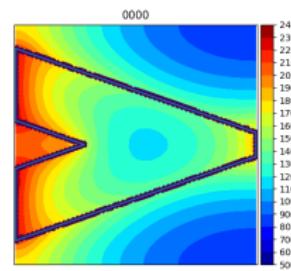
$$\alpha_{reg} = 30$$



$$\alpha_{reg} = 10$$



$$\alpha_{reg} = 10$$



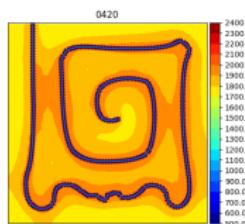
$$\alpha_{reg} = 20$$



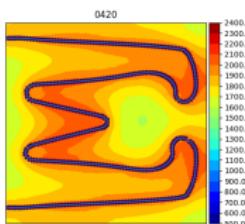
Résultats : fusion d'un carré de 10cm de côté

Valeurs : (Allaire and Jakabčin [1] and Van Belle [9])

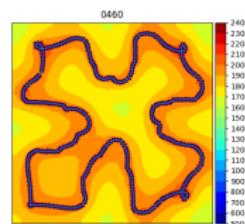
$$\lambda_{sol.} = 15 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad \lambda_{sol.} = 0.25 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad L = 10\text{cm}, \quad \Delta Z = 1\text{m}, \quad P = 800 \text{ W.m}^{-2}, \\ T_\Phi = 1700\text{K}, \quad T_M = 2000\text{K}, \quad T_{init} = 500\text{K}.$$



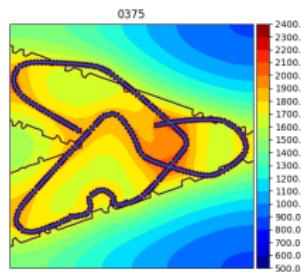
$$\alpha_{reg} = 10$$



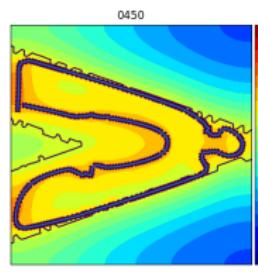
$$\alpha_{reg} = 30$$



$$\alpha_{reg} = 10$$



$$\alpha_{reg} = 10$$



$$\alpha_{reg} = 20$$

Trajectoire instationnaire

Problème d'optimisation considéré

Modélisation instationnaire : la source évolue le long de la trajectoire.

Objectif : faire fusionner la pièce à longueur de trajectoire fixe et vitesse de parcours constante (vitesse $V > 0$ fixée et temps final $t_F > 0$ fixe).

$$\min_{\Gamma} J(\theta) = \int_D \left[\left(T_\Phi - \max_t (|T(.,x)|) \right)^+ \right]^2 dx \approx \int_D \left[(T_\Phi - \|T(.,x)\|_{L^p(0,t_F)})^+ \right]^2 dx.$$

et T solution de :

$$\begin{cases} \rho c_p \partial_t T - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \frac{\lambda_{sol}}{L \Delta Z} T = \frac{q(t,x)}{L}, & (t,x) \in (0, t_F) \times \Sigma, \\ \lambda \nabla T \cdot n = 0, & (t,x) \in (0, t_F) \times \partial \Sigma, \\ T(0, x) = T_{init}(x) & x \in \Sigma. \end{cases}$$

Contrôle optimal de la direction de la ligne

(Lions [5] and Wendl, Pesch, and Rund [10])

Contrôle de la ligne : par l'angle θ , entre l'horizontale et la tangente en chaque point.

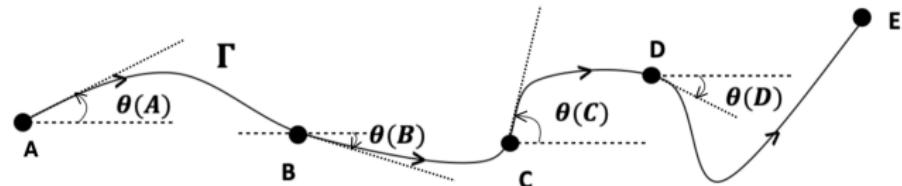
$$\min_{\Gamma} J(\theta)$$

sous la contrainte :

$$\begin{cases} \rho c_p \partial_t T - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \frac{\lambda_{sol}}{L \Delta Z} T = \frac{q(t,x)}{L}, & (t,x) \in (0, t_F) \times \Sigma, \\ \lambda \nabla T \cdot n = 0, & (t,x) \in (0, t_F) \times \partial \Sigma, \\ T(0, x) = T_{init}(x) & x \in \Sigma. \end{cases}$$

avec $q(t, x) = P \exp(-\delta|x - u(t)|^2)$, où l'équation de la trajectoire u est :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = VF(\theta(t)) = V(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))), & \forall t \in (0, t_F) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$



Contrôle optimal de la direction de la ligne, résolution

Utilisation d'une fonction Lagrangienne représentative du problème :

$$\mathcal{L}(\theta, T, p, u, w) = J(\theta)$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{t_F} \int_{\Sigma} \left[\left(\rho c_p \partial_t T + \frac{\lambda_{sol}}{L \Delta Z} T - \frac{q}{L} \right) p + \lambda \nabla T \nabla p \right] dx dt + \int_{\Sigma} \rho c_p (T(0, x) - T_{init}) p(0, x) dx \\
 & + \int_0^{t_F} [(\dot{u}(t) - VF(\theta(t))) w] dt + (u(0) - u_0) w(0).
 \end{aligned}$$

Si u trajectoire et T température, pour tout adjoint p et tout adjoint w , on a $\mathcal{L}(\theta, T, p, u, w) = J(\theta)$,
d'où :

$$\begin{aligned}
 \frac{dJ}{d\theta}(\theta)(\tilde{\theta}) &= \frac{d\mathcal{L}}{d\theta}(\theta, T, p, u, w)(\tilde{\theta}) \\
 &= \partial_{\theta} \mathcal{L}(\theta, T, p, u, w)(\tilde{\theta}) \\
 &\quad + < \partial_u \mathcal{L}(\theta, T, p, u, w), \partial_{\theta} u(\theta)(\tilde{\theta}) > + < \partial_T \mathcal{L}(\theta, T, p, u, w), \partial_{\theta} T(\theta)(\tilde{\theta}) >
 \end{aligned} \tag{1}$$

ainsi que de deux adjoints :

- p^* lié à l'équation de la chaleur ($\partial_T \mathcal{L}(\theta, T, p^*, u, w) = 0$),
- w^* lié à l'équation de la trajectoire ($\partial_T \mathcal{L}(\theta, T, p^*, u, w^*) = 0$).



Résultats : fusion d'un carré de 10cm de côté

Valeurs : (Allaire and Jakabčin [1] and Van Belle [9])

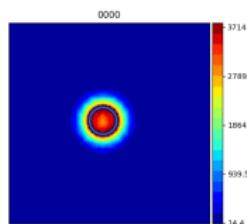
$$\lambda_{sol.} = 15 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad \lambda_{pou.} = 0.25 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1},$$

$$\rho_{sol.} = 8000 \text{ kg.m}^{-3}, \quad \rho_{pou.} = 4000 \text{ kg.m}^{-3},$$

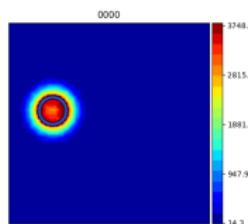
$$c_{sol.} = c_{pou.} = 450 \text{ J.kg}^{-1}.K^{-1}$$

$$L = 10\text{cm}, \quad \Delta Z = 10\text{cm}, \quad P = 768000 * (10^4) \text{ W.m}^{-2},$$

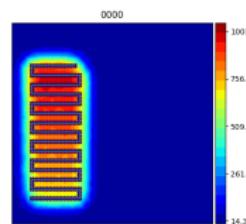
$$T_\Phi = 500\text{K}, \quad T_{init} = 30\text{K}, \quad p = 2.$$



$$\alpha_{reg} = 1, \quad |\Gamma| = 9\text{cm}$$



$$\alpha_{reg} = 1, \quad |\Gamma| = 9\text{cm}$$



$$\alpha_{reg} = 1, \quad |\Gamma| = 8.9\text{cm}$$

Résultats : fusion d'un carré de 10cm de côté

Valeurs : (Allaire and Jakabčin [1] and Van Belle [9])

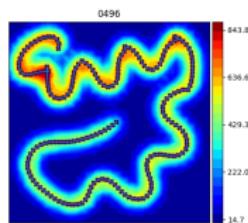
$$\lambda_{sol.} = 15 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad \lambda_{pou.} = 0.25 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1},$$

$$\rho_{sol.} = 8000 \text{ kg.m}^{-3}, \quad \rho_{pou.} = 4000 \text{ kg.m}^{-3},$$

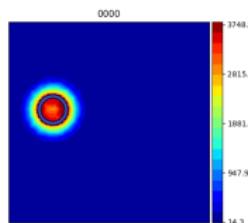
$$c_{sol.} = c_{pou.} = 450 \text{ J.kg}^{-1}.K^{-1}$$

$$L = 10\text{cm}, \quad \Delta Z = 10\text{cm}, \quad P = 768000 * (10^4) \text{ W.m}^{-2},$$

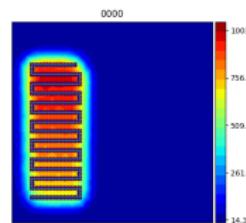
$$T_\Phi = 500\text{K}, \quad T_{init} = 30\text{K}, \quad p = 2.$$



$$\alpha_{reg} = 1, \quad |\Gamma| = 9\text{cm}$$



$$\alpha_{reg} = 1, \quad |\Gamma| = 9\text{cm}$$



$$\alpha_{reg} = 1, \quad |\Gamma| = 8.9\text{cm}$$

Résultats : fusion d'un carré de 10cm de côté

Valeurs : (Allaire and Jakabčin [1] and Van Belle [9])

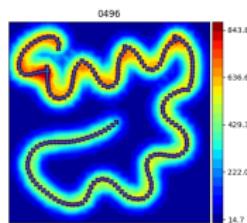
$$\lambda_{sol.} = 15 W.m^{-1}K^{-1}, \quad \lambda_{pou.} = 0.25 W.m^{-1}K^{-1},$$

$$\rho_{sol.} = 8000 kg.m^{-3}, \quad \rho_{pou.} = 4000 kg.m^{-3},$$

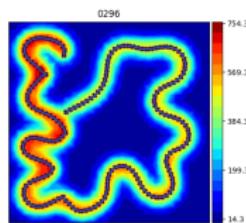
$$c_{sol.} = c_{pou.} = 450 J.kg^{-1}.K^{-1}$$

$$L = 10 cm, \quad \Delta Z = 10 cm, \quad P = 768000 * (10^4) W.m^{-2},$$

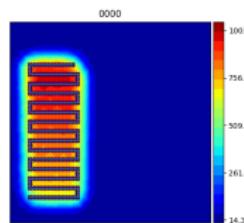
$$T_\Phi = 500 K, \quad T_{init} = 30 K., \quad p = 2.$$



$$\alpha_{reg} = 1, \quad |\Gamma| = 9 cm$$



$$\alpha_{reg} = 1, \quad |\Gamma| = 9 cm$$



$$\alpha_{reg} = 1, \quad |\Gamma| = 8.9 cm$$

Résultats : fusion d'un carré de 10cm de côté

Valeurs : (Allaire and Jakabčin [1] and Van Belle [9])

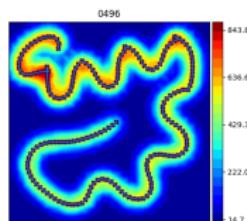
$$\lambda_{sol.} = 15 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad \lambda_{pou.} = 0.25 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1},$$

$$\rho_{sol.} = 8000 \text{ kg.m}^{-3}, \quad \rho_{pou.} = 4000 \text{ kg.m}^{-3},$$

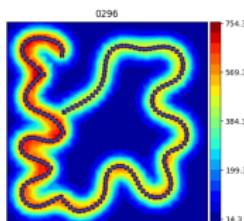
$$c_{sol.} = c_{pou.} = 450 \text{ J.kg}^{-1}.K^{-1}$$

$$L = 10\text{cm}, \quad \Delta Z = 10\text{cm}, \quad P = 768000 * (10^4) \text{ W.m}^{-2},$$

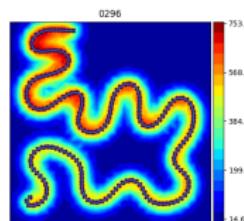
$$T_\Phi = 500\text{K}, \quad T_{init} = 30\text{K}, \quad p = 2.$$



$$\alpha_{reg} = 1, \quad |\Gamma| = 9\text{cm}$$



$$\alpha_{reg} = 1, \quad |\Gamma| = 9\text{cm}$$



$$\alpha_{reg} = 1, \quad |\Gamma| = 8.9\text{cm}$$

Conclusion et perspectives

Perspectives

Perspectives à court terme :

- cas stationnaire :
 - optimiser selon de nouvelles contraintes (géométriques, thermiques et mécaniques),
 - autoriser la division de la trajectoire ou la “fusion” de plusieurs,
 - adapter la discréétisation de la courbe aux contraintes industrielles,
 - passer du cas 2D à une optimisation de la trajectoire sur une succession de couches.
- cas instationnaire.
 - considérer le temps final t_F comme paramètre d'optimisation,
 - améliorer le modèle physique et ajouter des contraintes,
 - perspectives similaires à celles du cas stationnaire.

Perspectives à long terme :

- couplage entre optimisation de forme et de trajectoire,
- optimiser une ligne en 3D en stationnaire et instationnaire.

Références I



Grégoire Allaire and Lukas Jakabčin. "Taking into Account Thermal Residual Stresses in Topology Optimization of Structures Built by Additive Manufacturing". en. In: **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences** 28.12 (2018), pp. 2313–2366. DOI: 10.1142/s0218202518500501.



Grégoire Allaire, François Jouve, and Anca-Maria Toader. "Structural Optimization Using Sensitivity Analysis and a Level-Set Method". In: **Journal of Computational Physics** 194.1 (Feb. 2004), pp. 363–393. ISSN: 0021-9991. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.09.032.



T. DebRoy et al. "Additive Manufacturing of Metallic Components – Process, Structure and Properties". In: **Progress in Materials Science** 92 (Mar. 2018), pp. 112–224. ISSN: 0079-6425. DOI: 10.1016/j.pmatsci.2017.10.001.



Antoine Henrot and Michel Pierre. **Shape Variation and Optimization**. Vol. 28. EMS Tracts in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2018. ISBN: 978-3-03719-178-1. DOI: 10.4171/178.



Jacques Louis Lions. **Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations**. en. Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1971. ISBN: 978-3-642-65026-0.



Références II

-  Mustafa Megahed et al. "Metal Additive-Manufacturing Process and Residual Stress Modeling". en. In: **Integrating Materials and Manufacturing Innovation** 5.1 (Dec. 2016), p. 4. ISSN: 2193-9764, 2193-9772. DOI: 10.1186/s40192-016-0047-2.
-  I. A. Roberts et al. "A Three-Dimensional Finite Element Analysis of the Temperature Field during Laser Melting of Metal Powders in Additive Layer Manufacturing". In: **International Journal of Machine Tools and Manufacture** 49.12 (Oct. 2009), pp. 916–923. ISSN: 0890-6955. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2009.07.004.
-  G. Tryggvason et al. "A Front-Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow". In: **Journal of Computational Physics** 169.2 (May 2001), pp. 708–759. ISSN: 0021-9991. DOI: 10.1006/jcph.2001.6726.
-  Laurent Van Belle. **Analyse, Modélisation et Simulation de l'apparition de Contraintes En Fusion Laser Métallique**. Lyon, INSA, Nov. 2013.
-  S. Wendl, H. J. Pesch, and A. Rund. "On a State-Constrained PDE Optimal Control Problem Arising from ODE-PDE Optimal Control". en. In: **Recent Advances in Optimization and Its Applications in Engineering**. Ed. by Moritz Diehl et al. Springer Berlin Heidelberg, 2010, pp. 429–438. ISBN: 978-3-642-25980-0